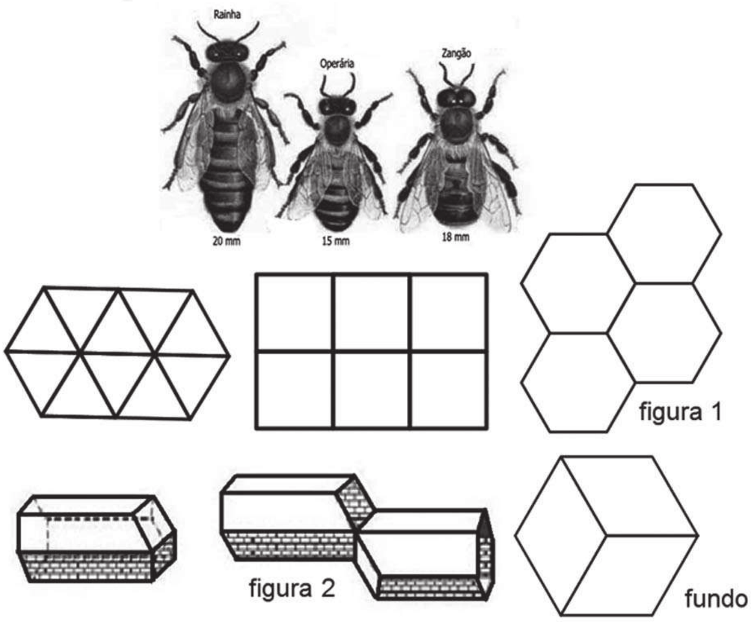
As abelhas trabalhadoras

Por: Helena Sousa Melo
hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
CMATI / Departamento de Matemática
Universidade dos Açores



No reino animal, todos têm a sua tarefa definida, o seu trabalho. Os seres humanos dispõem de uma série de profissões: professores, políticos, empresários, médicos, advogados, eletricistas, canalizadores, artífices, e muitas mais. Por sua vez, os animais irracionais não são tão versáteis. Por exemplo, as formigas detêm um lugar na sua sociedade com a atribuição de várias tarefas, por isso são consideradas como insetos *eusociais*, ou seja, possuem uma sobreposição de gerações num mesmo ninho, um cuidado cooperativo com a prole e uma organização na divisão de tarefas, que corresponde às castas.

As abelhas também são consideradas como insetos *eusociais*, pois constroem colmeias para guardarem o mel, bem como, para o desenvolvimento e a reprodução da sua própria espécie. Uma colmeia pode ser composta por volta de 60000 abelhas, que são divididas em três castas: a casta da rainha, a casta dos zangões e a casta das operárias, ou obreiras, que desempenham diversas tarefas. Nesta sociedade, apenas as operárias dedicam-se à construção, pois os zangões e a rainha, não estão equipados para esta função. No princípio, as abelhas operárias ainda não estão aptas para o trabalho fora da colmeia, assim dedicam-se inicialmente aos cuidados alimentares das ninfas – abelhas na fase do desenvolvimento pós-embrionário – assumindo a tarefa de ama, depois de algum tempo passam a empenhar-se na construção da colmeia, e quando as glândulas produtoras de cera deixam de funcionar, assumem uma nova tarefa, trabalhando na coleta do pólen e do néctar.

As colmeias são construídas a partir de um plano vertical e de cima para baixo, com uma ligeira inclinação, aproximadamente 13º (treze graus) em relação ao plano horizontal, evitando assim que o mel se derrame. A construção parte de uma série de pirâmides de três faces, de base aberta, que formam o fundo convexo do alvéolo. E os alvéolos, no lado oposto, estão desfasados em relação ao plano vertical, possibilitando que as concavidades oriundas de um lado sejam o fundo convexo do outro. Assim, todos os alvéolos possuem o mesmo tipo de fundo.

Como notamos, as abelhas, na construção das suas colmeias, obedecem a alguns critérios geométricos que conduzem a um melhor aproveitamento do espaço, possibilitando assim um maior armazenamento do mel. Então, quais são os critérios geométricos que as abelhas utilizam? Por que os alvéolos, construídos com cera, são prismas hexagonais, com fundos não planos, dispostos naquela forma?

Este problema despertou a curiosidade dos sábios desde a antiguidade, sendo o matemático grego, Papus de Alexandria (c. 290 – c. 350), o primeiro que mostrou interesse por esse estudo.

Podemos considerar que a construção das colmeias é um exemplo admirável, no mundo animal, da resolução de um problema matemático de máximos e mínimos. Com uma geometria simples, mas perfeita, as abelhas constroem o favo usando muita pouca cera, ocupando o mínimo de espaço e conseguindo uma capacidade máxima de armazenagem. Por outras palavras, temos um problema que conjuga a menor área com o maior volume. Iremos explorá-lo parcialmente, considerando um corte vertical e horizontal nos alvéolos. Assim, abordamos duas questões: uma primeira, associada a procura de uma forma geométrica que, tendo o mesmo perímetro (soma do comprimento de todos os lados), obtemos uma maior área, e uma segunda, relacionada com o volume máximo conseguido através do seu fechamento.

Conseguimos preencher um plano com o mesmo polígono regular (igual comprimento de lados e de ângulos internos), sem deixar espaços, apenas com três deles: os triângulos equiláteros (todos os lados de mesmo comprimento), os quadrados ou os hexágonos regulares. Mas, se todos tiverem o mesmo perímetro, com qual deles podemos obter a maior área? Suponhamos então que todos esses polígonos regulares têm o mesmo perímetro, por exemplo, p unidades de medida linear (u.m.l.). Assim, no triângulo equilátero cada lado tem o comprimento igual a $p/3$ u.m.l., no quadrado, o comprimento do lado é de $p/4$ u.m.l. e no hexágono regular, o lado tem comprimento igual $p/6$ u.m.l.. Com esta informação, e utilizando fórmulas matemática para o cálculo da área de um polígono regular em que conhecemos o comprimento do lado, temos que: no triângulo equilátero, a sua área é igual ao produto do quadrado do seu lado pela raiz quadrada de 3, dividido por 36, ou seja, aproximadamente 0,04811 p^2 unidades de medida quadrada (u.m.q.); no quadrado, a sua área é igual ao quociente da divisão do quadrado do seu lado por 16, ou seja, aproximadamente 0,0625 p^2 u.m.q. e no hexágono regular, a sua área é igual ao produto do quadrado do seu lado pela raiz quadrada de 3, dividido por 24, ou seja, aproximadamente 0,0722 p^2 u.m.q.. Assim, o hexágono regular apresenta a forma geométrica que possibilita a maior área de armazenamento de mel com o menor consumo de cera. (figura 1)

Também podemos pensar ao contrário, ou seja, considerando os três polígonos regulares com a mesma área e analisar qual deles tem o menor perímetro, tornando possível o menor uso de cera. Esse problema é resolvida utilizando as mesmas formas matemáticas anteriores, mas, agora, supondo para o valor da área, por exemplo, A. Assim, temos que o consumo de cera no caso do triângulo equilátero é aproximadamente o produto de 1,51967 pela raiz quadrada de A, no caso do quadrado, uma vez a raiz quadrada de A e no caso do hexágono, aproximadamente o produto de 0,620403 pela raiz quadrada de A. Comparando os valores obtidos, 1,51968, 1 e 0,620403, observamos que o consumo menor de cera está novamente relacionado com o hexágono regular.

A segunda questão, ou seja, a obtenção do maior volume de fechamento, é solucionada pela escolha de uma superfície poliédrica constituída por três losangos, geometricamente iguais entre si, para o fundo convexo do alvéolo. Pois feitos alguns cálculos, chegamos à conclusão que o ângulo obtuso do losango deve ter o valor de 109º28'16" (cento e nove graus, vinte e oito minutos e dezasseis segundos) para que o menor consumo de cera promova a maior capacidade de armazenamento do mel. (figura 2)

O famoso físico e naturalista René-Antoine Réaumur (1683 – 1757), em 1712, foi o primeiro que verificou o valor constante dos ângulos de fechamento do alvéolo. Assim, propôs, anos mais tarde, ao seu amigo matemático alemão Samuel Konig (1712 – 1757) o seguinte problema: *Dada uma célula hexagonal terminada por três losangos iguais, qual deve ser a configuração, para um volume constante, a menor quantidade de material?*

A forma adotada pelas abelhas é uma consequência física do processo de construção da colmeia e das suas características genéticas, resultando também no ângulo obtuso de 190º28'16" do losango de fechamento. Assim, nossa abelhas trabalhadoras, apesar de não resolveram problemas matemáticos, foram tão precisas quanto os matemáticos do século XVIII.